

А. В. Пожидаев, Н. М. Пекельник,
О. И. Хаустова, И. А. Трефилова

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГАММА-ФУНКЦИИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Одной из важнейших функций, выраженных несобственным интегралом, содержащим параметр, является гамма-функция. Она естественно возникает во многих областях современной математики и приложениях. Особая роль этой функции в математическом анализе определяется тем, что через нее выражаются важные определенные интегралы, суммы рядов и бесконечные произведения. В последнее время усилия многих авторов направлены на получение различных оценок этой функции. Цель настоящей работы состоит в получении одного из возможных разложений гамма-функции в бесконечное произведение и анализ этого представления.

Материалы и методы. Используются подходящие интегральные представления функций, различные свойства сходящихся несобственных интегралов с параметром и их предельное поведение. При этом применяется метод математической индукции.

Результаты и выводы. Получено определенное представление гамма-функции в виде бесконечного произведения в некоторой точке. Анализ полученных результатов позволил установить связь между гамма-функцией и распределением Пуассона.

Ключевые слова: гамма-функция, константа Эйлера, бесконечное произведение, дифференцирование несобственного интеграла по параметру, двусторонние оценки гамма-функции, предельное поведение интеграла.

A. V. Pozhidaev, N. M. Pekelnik,
O. I. Khaustova, I. A. Trefilova

SOME REPRESENTATIONS OF THE GAMMA FUNCTION

Abstract.

Background. One of the most important functions, expressed by an improper integral containing a parameter, is the gamma function. It occurs naturally in many areas of modern mathematics and applications. The special role of this function in mathematical analysis is that some important definite integrals, infinite series and infinite products are expressed through it. In recent years, the efforts of many authors have been aimed at getting different estimates of this function. The purpose of this paper is to make one of the possible decompositions of the gamma function into an infinite product and the analysis of this representation.

Materials and methods. The authors used suitable integral representations of functions, various properties of convergent improper integrals with a parameter and their behavior in the limit. Herewith, the method of mathematical induction was applied.

Results and conclusions. The researchers have obtained some representation of the gamma function as an infinite product at some point. The analysis of the obtained results allowed to establish a connection between the gamma function and the Poisson distribution.

Key words: gamma function, Euler's constant, infinite product, differentiation of an improper integral by a parameter, two-sided estimates of the gamma function, behavior of an integral in the limit.

Введение

Гамма-функция Эйлера при $x > 0$ задается формулой

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1)$$

Это соотношение было получено Адриен Мари Лежандром из оригинального определения Леонарда Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{x-1} d\tau$$

при помощи замены $t = \ln \frac{1}{\tau}$.

В настоящее время именно соотношение (1) Лежандра рассматривается как классическое определение гамма-функции. Ему же принадлежит название и обозначение $\Gamma(x)$.

Важнейшая роль гамма-функции в математическом анализе определяется тем, что через нее выражаются многие известные определенные интегралы, бесконечные произведения и суммы рядов. Кроме того, она широко используется в теории специальных функций, аналитической теории чисел, математической статистике и других областях математики. Среди работ, посвященных гамма-функции, выделим классические [1, 2]. Отметим также очень полезную статью Г. К. Srinivasan [3], где приведена подробная историческая справка и изложены основные свойства гамма-функции.

В последние годы усилия многих авторов направлены на установление различных неравенств для гамма-функции. Укажем, например, на двойное неравенство, полученное в 2007 г. X. Li и Ch. P. Chen в работе [4]:

$$\frac{x^{x-\gamma}}{e^{x-1}} < \Gamma(x) < \frac{x^{x-\frac{1}{2}}}{e^{x-1}},$$

где $\gamma = 0,577215\dots$ – эйлерова константа.

Кроме того, отметим оценки, полученные в [5]:

$$\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y e} \leq \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \leq \frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y}.$$

Много других интересных неравенств получено в статьях [6–10].

1. Формулировка основных результатов

Целью настоящей работы является получение разложения гамма-функции в виде бесконечного произведения в точке $\frac{q}{p}$, где $0 < q < p$. Кроме того, будет установлена связь между гамма-функцией и распределением Пуассона.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1.1. При $0 < q < p$ справедливо равенство

$$\Gamma\left(\frac{q}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot n^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (2)$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на подходящее интегральное представление функций и различные свойства сходящихся несобственных интегралов с параметром. Отметим, что в [1] приведена формула

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

При этом вывод этого равенства основывался на логарифмической выпуклости интеграла (1).

Хорошо известно, что гамма-функция естественно возникает во многих важных статистических распределениях. Например, плотности распределений Стюдента и хи-квадрат имеют соответственно вид

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

где n, k – число степеней свободы.

Среди других распределений, содержащих гамма-функцию, можно отметить бета-распределение, распределение Вейбулла и гамма-распределение.

Следующее утверждение показывает, что гамма-функция тесно связана не только со статистическими, но и дискретными вероятностными распределениями.

Теорема 1.2. При $\lambda < 1$ имеет место соотношение

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = n-1) \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right) (ne)^{\lambda} \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}, \quad (3)$$

где ξ – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ .

2. Доказательство теоремы 1.1

Предварительно сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. При наложенных ограничениях на p и q справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{x^p + y^p} dy = \frac{1}{x^{p-q}} \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (4)$$

Доказательство. Запишем левую часть соотношения (4) в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{x^p + y^p} dy = \frac{1}{x^p} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p} dy = \frac{x^q}{x^p} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{q-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p} d\frac{y}{x}. \quad (5)$$

Согласно [11]

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{q-1}}{1 + t^p} dt = \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (6)$$

Таким образом, из (5) и (6) вытекает равенство (4).

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что при $x \geq a > 0$ интеграл в левой части (4) не имеет особенностей в нуле и на бесконечности. Кроме того, выполнены все условия, обеспечивающие возможность дифференцирования по x под знаком интеграла.

Дифференцируя обе части равенства (4), имеем

$$-p x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^2} dy = -(p-q) \frac{1}{x^{p-q+1}} \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^2} dy = \frac{p-q}{p} \cdot \frac{1}{x^{2p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (7)$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$-2p x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^3} dy = -(2p-q) \cdot \frac{1}{x^{2p-q+1}} \cdot \frac{p-q}{p} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^3} dy = \frac{(p-q)(2p-q)}{p \cdot 2p} \cdot \frac{1}{x^{3p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (8)$$

Равенства (7), (8) позволяют предположить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. При наложенных ограничениях на p и q справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^n} dy = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q) \dots ((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot \frac{1}{x^{n p - q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (9)$$

Доказательство. Соотношения (7), (8) показывают, что равенство (9) выполняется для $n = 2, 3$. Предположим, что оно справедливо для $n = k$. Покажем, что (9) будет выполняться для $n = k + 1$.

Положим в (9) $n = k$ и продифференцируем обе части по x , тогда

$$\begin{aligned} & -k \cdot p \cdot x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^{k+1}} dy = \\ & = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q) \dots ((k-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (k-1)p} \cdot (-(kp-q)) \cdot \frac{1}{x^{kp-q+1}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^{k+1}} dy = \\ & = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q) \dots ((k-1)p-q) \cdot (kp-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (k-1) \cdot kp} \cdot \frac{1}{x^{(k+1)p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \end{aligned}$$

Лемма 2.2 доказана.

Положим в (9) $x = \sqrt[p]{n}$. При этом значении x соотношение (9) принимает вид

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^n} dy = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q) \dots ((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot n^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (10)$$

Исследуем предельное поведение при $n \rightarrow \infty$ интеграла в левой части (10).

Лемма 2.3. При $0 < q < p$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^n} dy = \int_0^{\infty} y^{q-1} e^{-y^p} dy. \quad (11)$$

Доказательство. Используя свойство интеграла и неравенство треугольника, для любого $L > 0$ получаем

$$\left| \int_0^{\infty} y^{q-1} \left(\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^{-n} - e^{-y^p} \right) dy \right| \leq \int_0^{\infty} \left| y^{q-1} \left(\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^{-n} - e^{-y^p} \right) \right| dy \leq$$

$$\leq \int_0^L y^{q-1} \left| \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right| dy + \int_L^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy + \int_L^\infty y^{q-1} \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} dy. \quad (12)$$

При $\alpha > 0$ справедливо неравенство $(1 + \alpha)^n > n\alpha$. Поэтому последнее слагаемое в правой части (12) допускает оценку

$$\int_L^\infty y^{q-1} \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} dy \leq \int_L^\infty \frac{1}{y^{p-q+1}} dy. \quad (13)$$

Так как $p > q$, то интеграл в правой части (13) не имеет особенностей на бесконечности. Следовательно,

$$\int_L^\infty \frac{1}{y^{p-q+1}} dy = -\frac{1}{p-q} \cdot \frac{1}{y^{p-q}} \Big|_L^\infty = \frac{1}{(p-q)L^{p-q}}. \quad (14)$$

Несобственный интеграл $\int_0^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy$ сходится, и выполняются соотношения (13), (14). Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать L столь большим, что

$$\int_L^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy + \frac{1}{(p-q)L^{p-q}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

По второму замечательному пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} = e^{-y^p}$. Следовательно, можно выбрать n настолько большим, что

$$\int_0^L y^{q-1} \left| \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right| dy \leq L^{q-1} \int_0^L \left| \left(1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right| dy < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Утверждение леммы 2.3 следует из неравенства (12) и оценок (15), (16). Опираясь на утверждения лемм 2.1–2.3, завершим доказательство теоремы 1.1.

Согласно [11] имеем

$$\int_0^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{q}{p}\right), \quad (17)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ – гамма-функция.

Из (10), (11), (17) получаем, что

$$\frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{q}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q) \dots ((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot n^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2

Положим в равенстве (2) $q = 1$, $\frac{1}{p} = \lambda$, тогда

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right)}{(n-1)!} \cdot n^{\lambda} \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi},$$

отсюда

$$(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right)}{(n-1)!} \cdot (ne)^{\lambda} \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}. \quad (18)$$

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ – дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ , тогда

$$P(\xi = n-1) = \frac{\lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda}}{(n-1)!}, \quad (19)$$

где $P(A)$ – вероятность события A .

Соотношение (19) позволяет равенство (18) записать в виде

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = n-1) \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right) (ne)^{\lambda} \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}.$$

Теорема 1.2 доказана.

Список литературы

1. **Артин, Э.** Введение в теорию гамма-функций : пер. с нем. / Э. Артин. – Изд. 2-е. – М. : Либроком, 2009. – 40 с. – (Физико-математическое наследие: математика (теория функций)).
2. **Davis, P. J.** Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function / P. J. Davis // American Mathematical Monthly. – 1959. – Vol. 66, № 10. – P. 849–869.
3. **Srinivasan, G. K.** The gamma function: An Eclectic Tour / G. K. Srinivasan // American Mathematical Monthly. – 2007. – Vol. 114, № 4. – P. 297–315.
4. **Li, X.** Inequalities for the gamma function / X. Li, Ch.-P. Chen // Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 8, № 1.
5. **Song-Zhimin.** On some new inequalities for the Gamma function / Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li // Octagon mathematical magazine. – 2009. – Vol. 17, № 1. – P. 14–18.

6. **Alzer, H.** Monotonicity properties of the gamma function / H. Alzer, N. Batir // *Applied Mathematics Letters*. – 2007. – Vol. 20, Iss. 7. – P. 778–781.
7. **Alzer, H.** On Ramanujan's double inequality for the gamma function / H. Alzer // *Bulletin of the London Mathematical Society*. – 2003. – Vol. 35, № 5. – P. 601–607.
8. **Batir, N.** Some new inequalities for gamma and polygamma functions / N. Batir // *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. – 2005. – Vol. 6, № 4.
9. **Grinshpan, A. Z.** Completely monotonic function involving the gamma and q-gamma functions / A. Z. Grinshpan, M.E.H. Ismail // *Proceedings of the American Mathematical Society*. – 2006. – Vol. 134, № 4. – P. 1153–1160.
10. **Qui, S. L.** Some properties of gamma and psi functions with applications / S. L. Qui, M. Vuorinen // *Mathematics of Computation*. – 2005. – Vol. 74, № 250. – P. 723–742.
11. **Двайт, Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт ; пер. с англ. Н. В. Леви ; под ред. К. А. Семендяева. – Изд. 10-е, стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2009. – 232 с.

References

1. Artin E. *Vvedenie v teoriyu gamma-funktsiy: per. s nem.* [Introduction into theory of gamma functions: translation from German]. Ed. 2nd. Moscow: Librokom, 2009, 40 p. (Fiziko-matematicheskoe nasledie: matematika (teoriya funktsiy)) [Physical and mathematical heritage: mathematics (theory of functions)].
2. Davis P. J. *American Mathematical Monthly*. 1959, vol. 66, no. 10, pp. 849–869.
3. Srinivasan G. K. *American Mathematical Monthly*. 2007, vol. 114, no. 4, pp. 297–315.
4. Li X., Chen Ch.-P. *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2007, vol. 8, no. 1.
5. Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li *Octagon mathematical magazine*. 2009, vol. 17, no. 1, pp. 14–18.
6. Alzer H., Batir N. *Applied Mathematics Letters*. 2007, vol. 20, iss. 7, pp. 778–781.
7. Alzer H. *Bulletin of the London Mathematical Society*. 2003, vol. 35, no. 5, pp. 601–607.
8. Batir N. *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2005, vol. 6, no. 4.
9. Grinshpan A. Z., Ismail M.E.H. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2006, vol. 134, no. 4, pp. 1153–1160.
10. Qui S. L., Vuorinen M. *Mathematics of Computation*. 2005, vol. 74, no. 250, pp. 723–742.
11. Dvayt G. B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of integrals and other mathematical formulas]. Transl. from English N. V. Levi. Saint-Petersburg; Moscow; Krasnodar: Lan', 2009, 232 p.

Пожидает Александр Васильевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей математики, Сибирский
государственный университет путей
сообщения (Россия, г. Новосибирск,
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: math@stu.ru

Pozhidaev Aleksandr Vasil'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher mathematics, Siberia State
University of Railway Transportation
(191 D. Kovalchuk street,
Novosibirsk, Russia)

Пекельник Наталья Михайловна

кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра высшей математики, Сибирский
государственный университет путей
сообщения (Россия, г. Новосибирск,
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: pekelniknm@mail.ru

Pekel'nik Natal'ya Mikhaylovna

Candidate of pedagogical sciences,
associate professor, sub-department
of higher mathematics, Siberia State
University of Railway Transportation (191
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

Хаустова Олеся Игоревна

кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра высшей математики, Сибирский
государственный университет путей
сообщения (Россия, г. Новосибирск,
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: lex711@yandex.ru

Khaustova Olesya Igorevna

Candidate of pedagogical sciences,
associate professor, sub-department
of higher mathematics, Siberia State
University of Railway Transportation (191
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

Трефилова Ирина Александровна

преподаватель, кафедра высшей
математики, Сибирский
государственный университет путей
сообщения (Россия, г. Новосибирск,
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: koja@mail.ru

Trefilova Irina Aleksandrovna

Lecturer, sub-department of higher
mathematics, Siberia State University
of Railway Transportation (191
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

УДК 517.581

Пожидаев, А. В.

О некоторых представлениях гамма-функции / А. В. Пожидаев,
Н. М. Пекельник, О. И. Хаустова, И. А. Трефилова // Известия высших учеб-
ных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. –
№ 4 (36). – С. 29–37.